有限集合を生成する禁止部分グラフ (デザイン、符号、グラフおよびその周辺)

斎藤, 明

数理解析研究所講究録
第 1844 巻 2013 年 81-89

有限集合を生成する禁止部分グラフ

日本大学・文理学部・情報システム解析学科 斎藤 明
Akira Saito
Department of Computer Science
Nihon University

本研究は江川嘉美(東京理科大学)、藤沢潤(慶應義塾大学)、古谷倫貴(東京理科大学)、Michael D. Plummer (Vanderbilt University, U.S.A.) との共同研究である。

与えられた連結グラフ F に対して、グラフ G が F と同形なグラフを誘導部分グラフに持たないとき、G は **F-フリー**である、または G において **F は禁止されている**という。特に $K_{1,3}$-フリーグラフは**クローフリーグラフ**ともよばれ、よく研究されている。

複数のグラフを禁止した状況を考えるため、$\mathcal{F}$-フリーグラフという概念もしばしば現れる。与えられた連結グラフの集合 $\mathcal{F}$ に対して、グラフ G が任意の $F \in \mathcal{F}$ について F-フリーであるとき、G は **$\mathcal{F}$-フリー**である、または G において **$\mathcal{F}$ は禁止されている**という。本研究では $\mathcal{F}$ が有限集合、それも $\mathcal{F}$ の位数が小さい場合を扱うが、定義上は $\mathcal{F}$ が無限集合であってもよい。例えば $\mathcal{F}$ として全てのサイクルの集合をとれば、連結な $\mathcal{F}$-フリーグラフは木に他ならない。また $\mathcal{F}$ として全ての奇サイクルをとれば、グラフ G が $\mathcal{F}$-フリーであることと G が 2 部グラフであることは同値である。

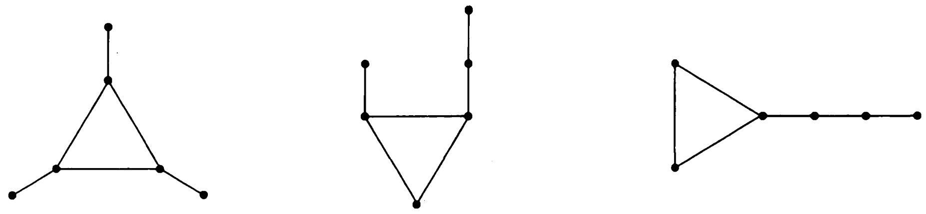
与えられた $\mathcal{F}$ について $\mathcal{F}$-フリーグラフの性質を調べるとき、$\mathcal{F}$ を**禁止部分グラフ**とよぶ。$\mathcal{F}$ を適当に設定すると、$\mathcal{F}$-フリーグラフは様々なおもしろい性質を示すことがあり、禁止部分グラフはグラフ理論の多くの分野に現れる。

Duffus, Gould, Jacobson [3] は禁止部分グラフとハミルトンサイクルの関係を調べ、以下の定理を得た。これはハミルトン性を保証する禁止部分グラフのペアを初めて発見するものであった。Net とは $(3,3,3,1,1,1)$ の次数列を持つ唯一のグラフである(図 1)。

定理 A (Duffus, Gould and Jacobson [3]) 任意の 2-連結な $\{K_{1,3}, \mathrm{Net}\}$-フリーグラフはハミルトンサイクルを持つ。

このようなペアが見つかると、他にもハミルトン性を保証する禁止部分グラフのペアがあるのではないかという疑問が生じる。実際、[3] の後、2-連結グラフにハミルトンサイクルの存在を保証するペアがいくつか発見された。そして 1991 年に Bedrossian がこのようなペアの完全決定に成功した。

Bedrossian の結果や本稿の定理を明瞭に述べるために、いくつか記法や定義を用意する。位数 2 以上の有限連結グラフ全体の成す集合を $\mathcal{G}$ とする。また正整数 k について、位数 2 以上の k-連結グラフ全体の成す集合を $\mathcal{G}_k$ とおく。定義より $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}$ であ



Net　　　　　W　　　　　Z_3

図 1: Net, W and Z_3

る。また $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ について、G_2 が G_1 と同形なグラフを誘導部分グラフに持つとき、$G_1 \prec G_2$ と表し、$\mathcal{G}$ の部分集合 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ について、

- 任意の $F_2 \in \mathcal{F}_2$ に対してある $F_1 \in \mathcal{F}_1$ が存在して $F_1 \prec F_2$

であるとき、$\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2$ であると定義する。$\leq$ は $2^{\mathcal{G}}$ 上の 2 項関係である。

$\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ について、$F \prec F'$, $F \neq F'$ なる 2 つのグラフ F, F' が $\mathcal{F}$ の中に存在すれば、グラフ G が $\mathcal{F}$-フリーであることと $(\mathcal{F} - \{F'\})$-フリーであることは同値である。すなわち $\mathcal{F}$ を禁止部分グラフとして考える場合には F' は不要である。もし与えられた $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ が $F \prec F'$, $F \neq F'$ なるペア $\{F, F'\}$ を含まなければ、$\mathcal{F}$ は**非冗長**であるという。$\boldsymbol{G} = \{\mathcal{F} \subset \mathcal{G}: \mathcal{F}$ は非冗長 $\}$ とおく。禁止部分グラフの対象は $\boldsymbol{G}$ の要素に限定してよい。Fujita ら [6] は、$\leq$ が $\boldsymbol{G}$ の中で性質の良い半順序となることを示した。

定理 B (Fujita et al. [6])

(1) $\leq$ は $\boldsymbol{G}$ の中で半順序である。

(2) $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \boldsymbol{G}$, $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2$ ならば、任意の $\mathcal{F}_1$-フリーグラフは $\mathcal{F}_2$-フリーである。

この定理により、与えられたグラフの性質 P について、任意の $\mathcal{F}$-フリーグラフが与えられた性質 P を満たすような禁止部分グラフ $\mathcal{F}$ を決定するためには、それらの $\leq$ による極大元を求めればよいことが分かる。

上記の記法、定義を用いれば、Bedrossian の結果は以下のように述べられる。W は図 1 に描かれているグラフであり、P_k は位数 k のパスである。

定理 C (Bedrossian [1]) F_1, $F_2 \in \mathcal{G}$ とするとき、任意の $\{F_1, F_2\}$-フリーグラフがハミルトンサイクルを持つための必要十分条件は $\{F_1, F_2\} \leq \{K_{1,3}, \mathrm{Net}\}$, $\{F_1, F_2\} \leq \{K_{1,3}, W\}$ または $\{F_1, F_2\} \leq \{K_{1,3}, P_6\}$ となることである。

Bedrossian の定理は、2-連結グラフにハミルトンサイクルの存在を保証するような禁止部分グラフのペアは、本質的に3つしかないと主張している。

Bedrossian の結果により、ハミルトンサイクルの存在と禁止部分グラフのペアの問題は決着したかに見えた。ところが 1995 年に新たな発見があった。Z_3 は図 1 に描かれているグラフである。

定理 D (Faudree et al. [5]) 位数 10 以上の 2-連結な $\{K_{1,3}, Z_3\}$-フリーグラフはハミルトンサイクルを持つ。

この定理の「位数 10 以上」という仮定は本質的であり、位数 9 の 2-連結な $\{K_{1,3}, Z_3\}$-フリーグラフでハミルトンサイクルを持たないものが存在する。従って「任意の 2-連結な $\{K_{1,3}, Z_3\}$-フリーグラフはハミルトンサイクルを持つ」という命題は偽であり、$\{K_{1,3}, Z_3\}$ は Bedrossian が決定したペアのリストには入っていない。しかし $\{K_{1,3}, Z_3\}$ は、禁止部分グラフのペアとハミルトンサイクルの関係について、Bedrossian のリストにあるペアとほぼ同等の知見を与える。上記命題は確かに偽であるが、反例は全て位数 9 以下であり、有限個しかない。逆に言えば、有限個の例外を認めれば、$\{K_{1,3}, Z_3\}$ もまた禁止部分グラフとして 2-連結グラフにハミルトンサイクルの存在を保証するのである。

有限個の例外を認めると、Bedrossian のリストにない禁止部分グラフのペア $\{K_{1,3}, Z_3\}$ が 2-連結グラフにハミルトンサイクルの存在を保証する、となれば、他にもそうしたペアがないかという疑問が生じる。Faudree と Gould [4] はこの点の研究を進め、たとえ有限個の例外を許しても、Bedrossian のリストに新たに加わるのは本質的に $\{K_{1,3}, Z_3\}$ のみであることを突き止めた。

定理 E (Faudree and Gould [4]) $F_1, F_2 \in \mathcal{G}$ とするとき、ある定数 N が存在し位数 N 以上の任意の連結な $\{F_1, F_2\}$-フリーグラフがハミルトンサイクルを持つための必要十分条件は、$\{F_1, F_2\} \leq \{K_{1,3}, \mathrm{Net}\}$, $\{F_1, F_2\} \leq \{K_{1,3}, W\}$, $\{F_1, F_2\} \leq \{K_{1,3}, P_6\}$ または $\{F_1, F_2\} \leq \{K_{1,3}, Z_3\}$ となることである

$\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ に対して、位数 2 以上の連結な $\mathcal{F}$-フリーグラフ全体の成す集合を $\mathcal{G}_k(\mathcal{F})$, 位数 2 以上の k-連結な $\mathcal{F}$-フリーグラフ全体の成す集合を $\mathcal{G}_(\mathcal{F})$ と表すことにしよう。

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \{G \in \mathcal{G} \colon G \text{ は } \mathcal{F}\text{-フリー}\}$$
$$\mathcal{G}_k(\mathcal{F}) = \mathcal{G}_k \cap \mathcal{G}(\mathcal{F})$$

ハミルトンサイクルの例でも見たように、$\mathcal{G}(\mathcal{F})$ や $\mathcal{G}_k(\mathcal{F})$ に属するグラフの性質を調べる場合、有限個の例外を認めることにより、より多くの知見が得られることがある。す

なわち調べるべき禁止部分グラフの集合 $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ とグラフの性質 P に対して、適当な定数 N を設定して

- 位数 N 以上の任意の連結（k-連結）な $\mathcal{F}$-フリーグラフは性質 P を満たす。

という命題を調べる。こうすると定理Eのように、より研究の視野が広がることがある。

しかしこのアプローチには1つ落とし穴がある。$\mathcal{G}_k(\mathcal{F})$ が有限集合になったと仮定しよう。すると任意のグラフの性質 P について、$\mathcal{G}_k(\mathcal{F})$ の要素全てを「有限個の例外」と設定することにより、「有限個の例外を除く任意の k-連結な $\mathcal{F}$-フリーグラフは性質 P を満たす」という命題は真となる。P に依存せず命題が真となるので、$\mathcal{F}$ は禁止部分グラフとして特定の性質 P に何ら知見を与えない。このような禁止部分グラフの集合 $\mathcal{F}$ を放置しておくと、$\mathcal{F}$ は全ての決定問題の解に入り込み、研究の視野を曇らせてしまう。こうした背景を踏まえ、本研究では $\mathcal{G}_k(\mathcal{F})$ が有限集合となるような $\mathcal{F}$ を調べた。

まず連結グラフのクラスで調べたところ、既に有限集合を生成する禁止部分グラフが特定されていた。

定理 F (Diestel [2], Proposition 9.4.1) $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ とするとき、$\mathcal{G}(\mathcal{F})$ が有限集合となるための必要十分条件は、$l \geq 2$, $m \geq 1$, $n \geq 2$ なるある整数 l, m, n について $\{K_l, K_{1,m}, P_m\} \subset \mathcal{F}$ となることである。

この定理により、$\mathcal{G}(\mathcal{F})$ が有限集合になるか否かは、$\mathcal{F}$ の中に完全グラフ、スター、パスが含まれるかどうかで決まる。但しこれは「$\mathcal{G}(\mathcal{F})$ を有限集合とするためには $|\mathcal{F}| \geq 3$ でなければならない」と言っているわけではない。例えば $\mathcal{G}(\{K_2\}) = \emptyset$（$\mathcal{G}$ では K_1 を除外していることに注意）だが、これは K_2 が1つで完全グラフ、スター、パスの3役をこなしているからである。

次に連結度を上げた状況で同じ問題を考える。連結度を上げると、対象となるグラフのクラスは小さくなる。すなわち $\mathcal{G} \supset \mathcal{G}_2 \supset \mathcal{G}_3 \supset \ldots$ という減少列を得る。これは特定のグラフを禁止した状況でも同じである。すなわち任意の $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ について $\mathcal{G}(\mathcal{F}) \supset \mathcal{G}_2(\mathcal{F}) \supset \mathcal{G}_3(\mathcal{F}) \supset \ldots$ となる。すると、$\mathcal{G}(\mathcal{F})$ が無限集合でも、この減少列の途中の項が有限集合になる可能性がある。言い替えれば、$k \geq 2$ では $\mathcal{F}$ が完全グラフ、スター、パスの全てを含んでいなくても、$\mathcal{G}_k(\mathcal{F})$ が有限集合となるかもしれない。我々はこの可能性を調べた。

まず、k の値に関わらず、$\mathcal{G}_k(\mathcal{F})$ が有限集合となるならば、$\mathcal{F}$ は完全グラフと完全2部グラフを含まなければならないことが分かった。

定理 1 k を正整数とし、$\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ とする。もし $\mathcal{G}_k(\mathcal{F})$ が有限集合となるならば、$l \geq 2$, $1 \leq m_1 \leq m_2$, $m_1 \leq k$ なるある整数について $\{K_l, K_{m_1,m_2}\} \subset \mathcal{F}$ である。

この定理は、帰結の $\mathcal{F}$ に含まれる完全2部グラフのうち、大きくない方の部集合の位数が連結度 k で抑えられることも主張している。上記定理で $k=1$ とすると、$\mathcal{F}$ は完全グラフとスターを含むことになる。従って、定理Fに現れる完全グラフ、スター、パスのうち、完全グラフとスターは一般の k で生じる原理を $k=1$ で見ているにすぎない。一方、定理1の中にパスやその拡張に相当するものは見られない。本稿のこの後の結果を見ると、パスは $k=1$ の場合特有の原理に由来するものであることが分かる。

完全グラフであると同時に完全2部グラフでもあるグラフは K_2 のみである。この事実と定理1より、k の値に関わらず、1個のグラフを禁止して k-連結グラフの中で有限集合を生成しようとするならば、K_2 を禁止せざるを得ないことが分かる。

系 2 k を正整数とし、$F \in \mathcal{G}$ とする。このとき $\mathcal{G}(\{F\})$ が有限集合となる必要十分条件は $F = K_2$ である。

次に2個のグラフを禁止しよう。系2より $\mathcal{G}(\{K_2\})$ は有限集合なので、任意の $H \in \mathcal{G}$ について $\mathcal{G}(\{K_2, H\})$ もまた有限集合である。こうした自明なペアを除外するため、禁止部分グラフに K_2 を入れないこととする。定理1によれば、求めるペアは完全グラフと完全2部グラフの組合せに限る。ところがちょうど2個のグラフだけを禁止して有限集合を生成しようとすると、さらに強い制約が得られる。

定理 3 k を2以上の整数とし、$\mathcal{F} \subset \mathcal{G} - \{K_2\}$ とする。もし $|\mathcal{F}| = 2$ であり、かつ $\mathcal{G}_k(\mathcal{F})$ が有限集合であるならば、$l \geq 3, 1 \leq m \leq k$ なるある整数 l, m について $\mathcal{F} = \{K_l, K_{1,m}\}$ である。

この定理により、2個のグラフを禁止して有限集合を得ようとするならば、完全グラフとスターの組合せのみを考えればよいことが分かる。

$l_2 \geq l_1 \geq 3, m_2 \geq m_1 \geq 2$ ならば $\{K_{l_1}, K_{1,m_1}\} \leq \{K_{l_2}, K_{1,m_2}\}$ である。この事実と連結度の性質から、我々は $\mathcal{G}_k(\{K_l, K_{1,m}\})$ に関する以下の3種類の単調列を得る。

(1) $\mathcal{G}_k(\{K_l, K_{1,2}\}) \subset \mathcal{G}_k(\{K_l, K_{1,3}\}) \subset \mathcal{G}_k(\{K_l, K_{1,4}\}) \subset \mathcal{G}_k(\{K_l, K_{1,5}\}) \subset \cdots$

(2) $\mathcal{G}_k(\{K_3, K_{1,m}\}) \subset \mathcal{G}_k(\{K_4, K_{1,m}\}) \subset \mathcal{G}_k(\{K_5, K_{1,m}\}) \subset \mathcal{G}_k(\{K_6, K_{1,m}\}) \subset \cdots$

(3) $\mathcal{G}_1(\{K_l, K_{1,m}\}) \supset \mathcal{G}_2(\{K_l, K_{1,m}\}) \supset \mathcal{G}_3(\{K_l, K_{1,m}\}) \supset \mathcal{G}_4(\{K_l, K_{1,m}\}) \supset \cdots$

(1), (2) は増加列であり、(3) は減少列である。これらの漸近的な振る舞いについて、我々は以下の結果を得た。

定理 4

(1) $k \geq 1,\, l \geq 3$ なる任意の整数 $k,\, l$ について、$\mathcal{G}_k(\{K_l, K_{1,m}\})$ が無限集合になるような正整数 m が存在する。

(2) $k \geq 1,\, m \geq 3$ なる任意の整数 $k,\, m$ について、$\mathcal{G}_k(\{K_l, K_{1,m}\})$ が無限集合になるような正整数 l が存在する。

(3) $k \geq 1,\, l \geq 3$ なる任意の整数$k,\, l$ について、$\mathcal{G}_k(\{K_l, K_{1,2}\})$ は有限集合である。

(4) $l \geq 3,\, m \geq 2$ なる任意の整数$l,\, m$ について、$\mathcal{G}_k(K_l, K_{1,m}\})$ が有限集合になるような整数k が存在する。

この定理により、上記3種類の単調列のうち (1) はいずれ無限集合に達し、(2) についても、スターが $K_{1,2}$ でなければ、いずれ無限集合に達する。但しスターが $K_{1,2}$ のときには、l をどれだけ大きくしても増加列は有限集合に留まる。また (3) の減少列に関しては、どのような完全グラフとスターを禁止しても、減少列は必ず空集合に至ることが分かる。

我々は (3) の減少列について、より詳しく調べた。上に述べたように、たとえ$\mathcal{G}(\{K_l, K_{1,m}\})$ が無限集合でも、減少列 $\left\{\mathcal{G}_k(\{K_l, K_{1,m}\})\right\}_{k\geq 1}$ はいずれ空集合に達する。では無限集合から空集合になる間に、非空有限の過渡的な状況を経るのだろうか。我々はこのような例を1つ発見することができた。Icosa は正20面体グラフである。

定理 5

(1) $\mathcal{G}_4(\{K_4, K_{1,3}\})$ は無限集合である。

(2) $\mathcal{G}_5(\{K_4, K_{1,3}\} = \{\text{Icosa}\}$

(3) $\mathcal{G}_6(K_4, K_{1,3}\}) = \emptyset$

$\mathcal{G}_k(\{K_l, K_{1,m}\})$ が有限集合となるようなペア $\{K_l, K_{1,m}\}$ の決定は6-連結グラフまで完成している。

定理 6 $l,\, m$ を$l \geq 3,\, m \geq 2$ なる整数とする。

(1) $\mathcal{G}(\{K_l, K_{1,m}\})$ が有限集合となるための必要十分条件は、 $l = 2$ である。

(2) $\mathcal{G}_2(\{K_l, K_{1,m}\})$ が有限集合となるための必要十分条件は、 $l = 2$ である。

(3) $\mathcal{G}_3(\{K_l, K_{1,m}\})$ が有限集合となるための必要十分条件は、 $l = 2$ または $(l, m) = (3, 3)$ である。

(4) $\mathcal{G}_4(\{K_l, K_{1,m}\})$ が有限集合となるための必要十分条件は、 $l = 2$ または $(l, m) \in \{(3,3), (3,4)\}$ である。

(5) $\mathcal{G}_5(\{K_l, K_{1,m}\})$ が有限集合となるための必要十分条件は、 $l = 2$ または $(l, m) \in \{(3,3), (3,4), (3,5), (4,3)\}$ である。

(6) $\mathcal{G}_6(\{K_l, K_{1,m}\})$ が有限集合となるための必要十分条件は、 $l = 2$ または $(l, m) \in \{(3,3), (3,4), (3,6), (4,3)\}$ である。

最後に３個のグラフを禁止する状況を考えよう。

まず 2-連結グラフのクラスを考える。定理１より、禁止する３個のグラフのうち１つは完全グラフであり、もう１つはスター、もしくは $K_{2,m}$ である。定理４ (3) より $\mathcal{G}_k(\{K_l, K_{1,2}\})$ は有限集合なので、任意の $H \in G$ について $\mathcal{G}_k(\{K_l, K_{1,2}, H\})$ もまた有限集合である。しかしこのような３つ組は本質的とはいえない。そこで以下の議論では、禁止するスターの位数は 4 以上と仮定する。

次の定理は、連結度が 2 であり、禁止部分グラフの集合が有限である場合に、３個目のグラフを規定する。

定理 7 $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ であり、$\mathcal{F}, \mathcal{G}_2(\mathcal{F})$ がともに有限集合であれば、$n \geq 2$ であるある整数 n について $P_n \in \mathcal{F}$ である。

この定理より、$\mathcal{G}_2(\{F_1, F_2, F_3\})$ が有限集合となるような３つ組 $\{F_1, F_2, F_3\}$ は以下の２種類に限定される。

(1) 完全グラフ K_l, スター $K_{1,m}$, パス P_n

(2) 完全グラフ K_l, $K_{2,m}$, パス P_n

定理Ｆより、(1) の組は l, m, n の値によらず有限集合を生成することが分かっている。従って残るのは (2) のタイプのみである。我々はこの場合の３つ組の特定に成功した。

定理 8 l, m, n を $l \geq 2, m \geq 2, n \geq 4$ なる整数とする。このとき $\mathcal{G}_2(\{K_l, K_{2,m}, P_n\})$ が有限集合となるための必要十分条件は

(1) $l = 3,\ m \geq 3,\ n \in \{4, 5\}$ または

(2) $l = 3,\ m = 2,\ n \in \{4, 5, 6\}$

である。

3-連結グラフについては状況は複雑であり、３つ組の特定には至っていない。定理１により $\mathcal{G}_3(\{F_1, F_2, F_3\})$ が有限集合となるならば F_1 は完全グラフであり、F_2 はスター，$K_{2,m}$，$K_{3,m}$ のいずれかとしてよい。2-連結グラフについては、３番目のグラフがパスであることを特定できたが、3-連結グラフでは３番目のグラフの種類は多様であり、しかも F_1, F_2 に依存する。現在以下が分かっている。但し自明な３つ組を排除するため、$|F_1| \geq 3$, $F_2 \neq K_{1,2}$, $\{F_1, F_2\} \neq \{K_3, K_{1,3}\}$ の仮定を置く。

(1) $F_2 = K_{3,m}$ $(m \geq 3)$ ならば $F_1 = K_3$ であり、F_3 も特定されている。特定されたグラフは有限個である。

(2) $F_2 = K_{2,m}$ （$m \geq 2$）ならば、$F_1 = K_3$ または $F_2 = K_4$ である。もし F_1 が K_4 ならば F_3 はパスである。さらにもし $m \geq 3$ ならば F_3 は P_4 または P_5 である。

(3) $F_2 = K_{2,m}$ $F_1 = K_3$ かつ $m \geq 5$ のときには F_3 は特定されている。特定されたグラフは有限個である。

(4) $F_2 = K_{2,m}$, $F_1 = K_3$ かつ $2 \leq m \leq 4$ のときには F_3 の特定は未完成である。但し F_3 が満たすべき条件はいくつか得られている。

F_2 がスター $K_{1,m}$ のときには、F_2 から来る制約がかなり強いので、F_1, F_3 から来る制約はそれほど強くなくてもよい。そのため、F_3 の特定は一層難しくなる。F_1 が完全グラフ、F_3 がパスならば定理Ｆにより $\mathcal{G}_3(\{F_1, F_2, F_3\})$ は有限集合になるが、それ以外にも様々な可能性が残されており、今のところ完全決定の目処は立っていない。

参考文献

[1] P. Bedrossian, *Forbidden subgraphs and minimum degree conditions for hamiltonicity*, Ph.D. Thesis, University of Memphis, 1991.

[2] R. Diestel *Graph Theory* (3rd. edition), Springer-Verlag, 2005.

[3] D. Duffus, R.J. Gould and M.S. Jacobson, Forbidden subgraphs and the Hamiltonian theme, *The theory and applications of graphs*, 297–316, Wiley, New York, 1981.

[4] R.J. Faudree, and R.J. Gould, Characterizing forbidden pairs for Hamiltonian properties, Discrete Math. **173** (1997), 45–60.

[5] R.J. Faudree, R.J. Gould, Z. Ryjàček and I. Schiermeyer, Forbidden subgraphs and pancyclicity, Congr. Numer. **109** (1995) 13–32.

[6] S. Fujita, K. Kawarabayashi, C. L. Lucchesi, K. Ota, M. Plummer and A. Saito, A pair of forbidden subgraphs and perfect matchings, J. Combin. Theory Ser. B **96** (2006) 315–324.